Vorschlag 1:

Aufgabe 1:

Ein zylindrischer Behälter ist bis zum oberen Rand mit Wasser gefüllt. Er soll mit Hilfe einer Pumpe leergepumpt werden. Der Radius r und die Höhe h des Zylinders sind bekannt: $r = 2{,}5$ dm, $h = 7{,}5$ dm

Die Pumpe arbeitet mit einer konstanten Abpumpgeschwindigkeit von 210 Litern pro Stunde.

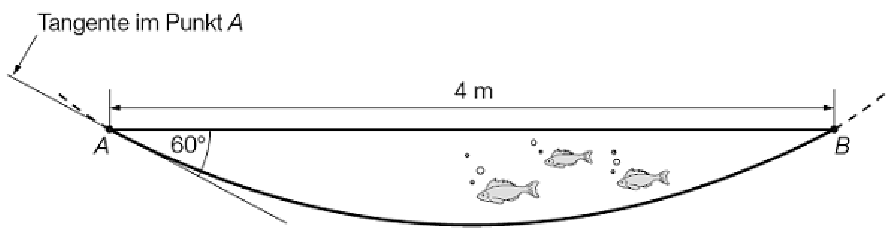
1) Berechnen Sie, wie viele Minuten es dauert, bis der Behälter leergepumpt ist. (B)
   Das Volumen des zylindrischen Behälters wird ermittelt mit: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

2) Formen Sie die Volumenformel nach r um. (B)
   Das Volumen des zylindrischen Behälters hängt von der Höhe h ab, der Radius r ist konstant.

3) Skizzieren Sie einen Graphen der Funktion V, welche der Wasserhöhe h das Volumen V zuordnet. (A)

Aufgabe 2:

Die Querschnittslinie eines Teichbodens kann zwischen den Punkten A und B näherungsweise durch den Graphen einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Quelle: Kompensationsprüfung 1, Jänner 2021, Seite 5

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion f. Wählen Sie als Ursprung des Koordinatensystems den Punkt A. (A)

2) Geben Sie an, wo der Ursprung des Koordinatensystems liegen muss, wenn die Querschnittslinie des Teichbodens zwischen A und B näherungsweise durch die Funktion g mit $g(x) = a \cdot x^2$ beschrieben werden soll. (R)

Für einen Punkt $C = (x_1|f(x_1))$ auf dem Graphen der Funktion f gilt:
$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) > 0$

3) Zeichnen Sie den Punkt C in der Abbildung ein. (A)

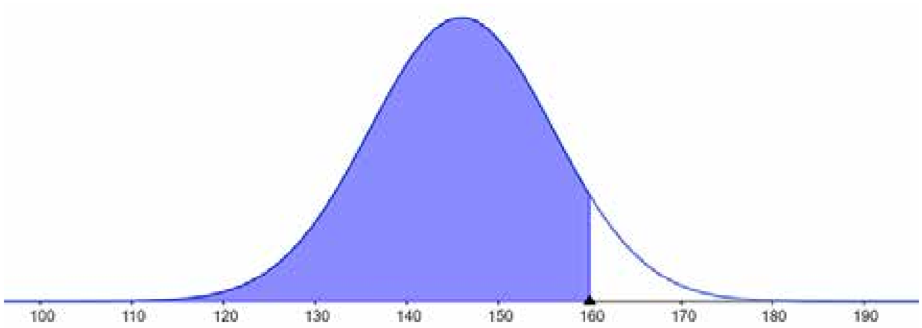
Aufgabe 3:

Eine Gruppe von Studierenden arbeitet an einem wissenschaftlichen Projekt. Erfahrungsgemäß kann die Arbeitszeit als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 146$ Minuten und der Standardabweichung $\sigma = 10$ Minuten angenommen werden.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Arbeitszeit einer zufällig ausgewählten Gruppe um höchstens ±17 Minuten vom Erwartungswert abweicht. (B)

Jemand behauptet, dass der Anteil der Studierenden, die mindestens 146 Minuten am Projekt arbeiten, 50 % beträgt.

2) Begründen Sie mit Hilfe der Dichtefunktion, warum diese Behauptung richtig ist. (R)
   In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.

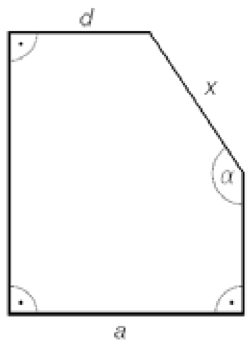


Arbeitszeit in Minuten

3) Interpretieren Sie die Bedeutung der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

Aufgabe 4:

Ein Grundstück hat folgende Form:



Quelle: Kompensationsprüfung 5, Juni 2018, Seite 5

1) Stellen Sie mit Hilfe von a, d und α eine Formel zur Berechnung von x auf. (A)

Auf dem Grundstück befindet sich ein Weingut. Der Alkoholgehalt von Wein wird üblicherweise in Prozent des Volumens angegeben. Ein bestimmter Weißwein hat 11 % Alkoholgehalt, Wasser 0 %. Eine Person mischt $\frac{1}{4}$ L dieses Weißweins mit $\frac{1}{8}$ L Wasser und erhält $\frac{3}{8}$ L Mischung.

2) Berechnen Sie den Alkoholgehalt der Mischung. (B)

Vom Weingut führt ein Gehweg mit 30 % Steigung zum Weingarten.

3) Erklären Sie an Hand einer Skizze, was man unter einer 30%igen Steigung versteht. (R)

Lösungen der Aufgabenstellungen des Vorschlags 1:

Aufgabe 1:

1) Berechnung des Volumens: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2{,}5^2 \cdot \pi \cdot 7{,}5 = 147{,}262\ldots \approx 147{,}26$

   $V = 147{,}26\ \text{dm}^3 = 147{,}26\ \text{L}$ **Merke: 1 dm³ ≃ 1 L**

   In 1 Stunde werden 210 L abgepumpt.

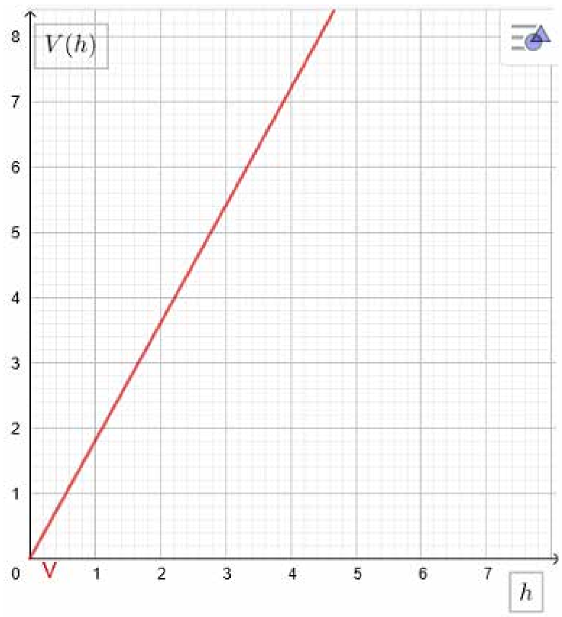
   $\frac{147{,}26}{210} = 0{,}701\ldots$ Stunden

   $0{,}701 \cdot 60 = 42{,}074\ldots \approx 42{,}07$ Minuten **Merke: 1 Stunde = 60 Minuten**

2) $V = r^2 \cdot \pi \cdot h \quad |:(\pi \cdot h)$

   $r^2 = \frac{V}{\pi \cdot h} \quad |\sqrt{}$

   $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ **GeoGebra: CAS**

3) 

Merke: Wenn eine Variable konstant ist, dann wird sie wie eine Zahl behandelt. Es gilt also: $V(h) = k \cdot h$

Aufgabe 2:

1) Da der Koordinatenursprung im Punkt A liegt, gilt: $A=(0|0)$

   1. Gleichung: $f(0) = 0$

   Die Tangente im Punkt A schließt mit der Horizontalen den Winkel von 60° ein, hat allerdings eine negative Steigung.

   2. Gleichung: $f'(0) = -\tan(60°) = -\sqrt{3} = -1{,}732\ldots$

   $B = (4|0)$

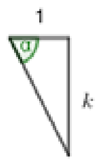
   3. Gleichung: $f(4) = 0$

   oder

   1. Gleichung: $c = 0$

   2. Gleichung: $b = -1{,}732\ldots$

   3. Gleichung: $a \cdot 16 + b \cdot 4 = 0$



Merke: Die Steigung der Tangente berechnen Sie mit Hilfe der 1. Ableitung.

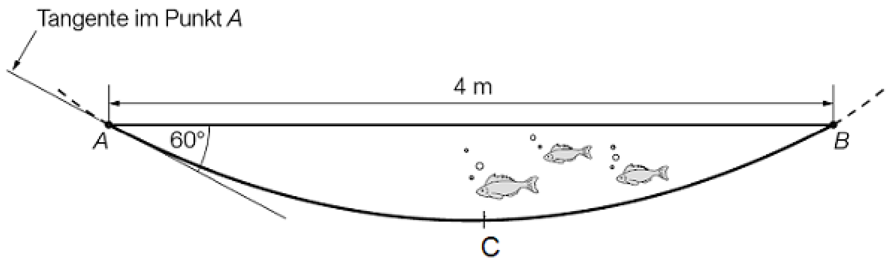
Merke: $\tan\alpha = k$

2) Eine Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot x^2$ hat ihren Scheitel auf der y-Achse. Bei dieser Aufgabenstellung ist es ein Tiefpunkt.

Daher ist der Koordinatenursprung in den Tiefpunkt $P = (2|f(2))$ zu legen.

Merke: Eine quadratische Funktion mit der Gleichung $g(x) = a \cdot x^2$ liegt stets symmetrisch zur y-Achse. Für alle $a > 0$ besitzt der Graph einen Tiefpunkt, für alle $a < 0$ einen Hochpunkt im Koordinatenursprung.

3)



Quelle: Kompensationsprüfung 1, Jänner 2021, Seite 5

**Merke: $f'(x_1) = 0$ bedeutet, dass die Tangente im Punkt C die Steigung 0 hat.
$f''(x_1) > 0$ bedeutet, dass der Punkt C im positiven Krümmungsbereich liegt, also dort der Graph der Funktion linksgekrümmt ist.
Beide Eigenschaften zusammengenommen bedeuten, dass es sich bei C um einen Tiefpunkt handelt.**

Aufgabe 3:

1) $P(129 \leq X \leq 163) = 0{,}910\,86\ldots \approx 91{,}09\,\%$

GeoGebra: Arbeiten Sie mit dem Wahrscheinlichkeitsrechner, Normalverteilung.

2) Es gilt: $P(X \geq 146) = 0{,}5$

Merke: Der Flächeninhalt zwischen der Gauß'schen Glockenkurve und der x-Achse hat den Wert 1. Die Gerade mit der Gleichung $x = \mu$ ist eine Symmetrieachse. Daher beträgt der Flächeninhalt rechts dieser Symmetrieachse 0,5 = 50 %.

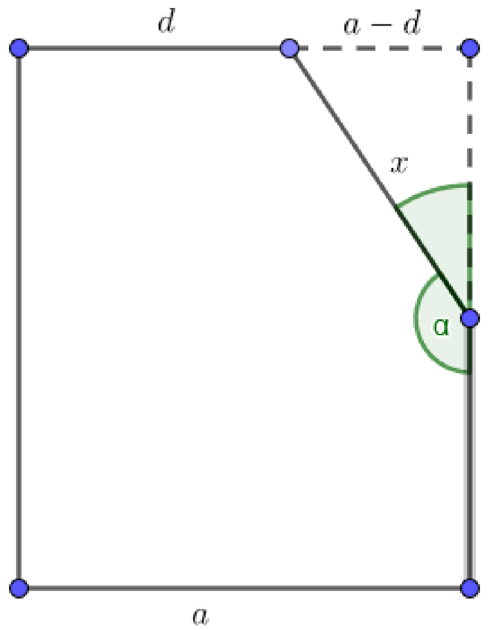
3) Der markierte Flächeninhalt gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine zufällig ausgewählte Gruppe von Studierenden höchstens 160 Minuten am Projekt arbeitet.

Aufgabe 4:

1) $\sin(180° - \alpha) = \frac{a - d}{x}$

$x = \frac{a - d}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{a - d}{\sin(\alpha)}$

Merke: Wenn Sie die Figur durch ein rechtwinkeliges Dreieck auf ein Rechteck ergänzen, können Sie in diesem Dreieck mit dem Sinus des Winkels (180° – α) = $\frac{GK}{H}$ arbeiten und schließlich auf *x* umformen (siehe nachstehende Abbildung).



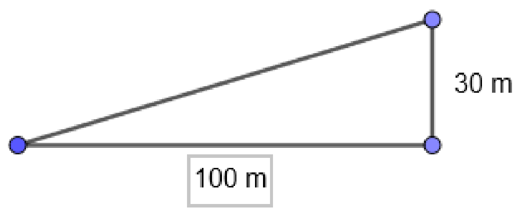
2) *x* … Alkoholgehalt der Mischung in %

$\frac{1}{4} \cdot 0{,}11 = \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{100} \Rightarrow x = 7{,}333\ldots$

Die Mischung hat einen Alkoholgehalt von 7,33 %.

Merke: Der Alkoholgehalt in der Mischung stimmt mit dem Alkoholgehalt des Weines überein, da in Wasser kein Alkohol enthalten ist.

3)



Merke: 30 % = $\frac{30}{100} = \frac{GK}{AK} = \tan(\alpha)$

Bei einer horizontalen Entfernung von 100 m steigt die Straße um 30 m.

Vorschlag 2:

Aufgabe 1:

Familie Berner unternimmt eine Ausflugsfahrt. Ihr Kraftfahrzeug verbraucht auf der Autobahn erfahrungsgemäß 4,3 L Benzin pro 100 km. Zu Beginn der Fahrt enthält der Tank 55 L Benzin. Die im Tank vorhandene Benzinmenge kann in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke näherungsweise mit Hilfe einer linearen Funktion V beschrieben werden.

x … seit Beginn der Fahrt zurückgelegte Strecke in km

$V(x)$ … Benzinmenge im Tank nach der zurückgelegten Strecke x in L

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf. (A)

Folgende Berechnung wird ausgeführt: $55 - V(350) = 39{,}95$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung des Ergebnisses 39,95 im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

Der Autofahrer muss bremsen (Zeitpunkt $t = 0$). Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = 30 - 2 \cdot t$ mit $t \geq 0$

t … Zeit ab Beginn des Bremsvorganges in s

$v(t)$ …Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

3) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg des Fahrzeugs in den ersten 15 s nach Beginn des Bremsvorganges. (B)

Aufgabe 2:

Die Wirkstoffmenge eines bestimmten Medikaments im Körper in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch eine Funktion A beschrieben werden.

$A(t) = A_0 \cdot b^t$

t … Zeit nach der Einnahme des Medikaments in Stunden, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Einnahme

$A(t)$ … Wirkstoffmenge zur Zeit t in mg

A_0 … Wirkstoffmenge zur Zeit $t = 0$

Die Gleichung $0{,}25 \cdot A_0 = A_0 \cdot b^t$ wird nach t aufgelöst.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

4 Stunden nach der Einnahme des Medikaments sind noch 0,20 mg des Wirkstoffs im Körper vorhanden. 9 Stunden nach der Einnahme sind nur mehr 0,045 mg des Wirkstoffs im Körper vorhanden.

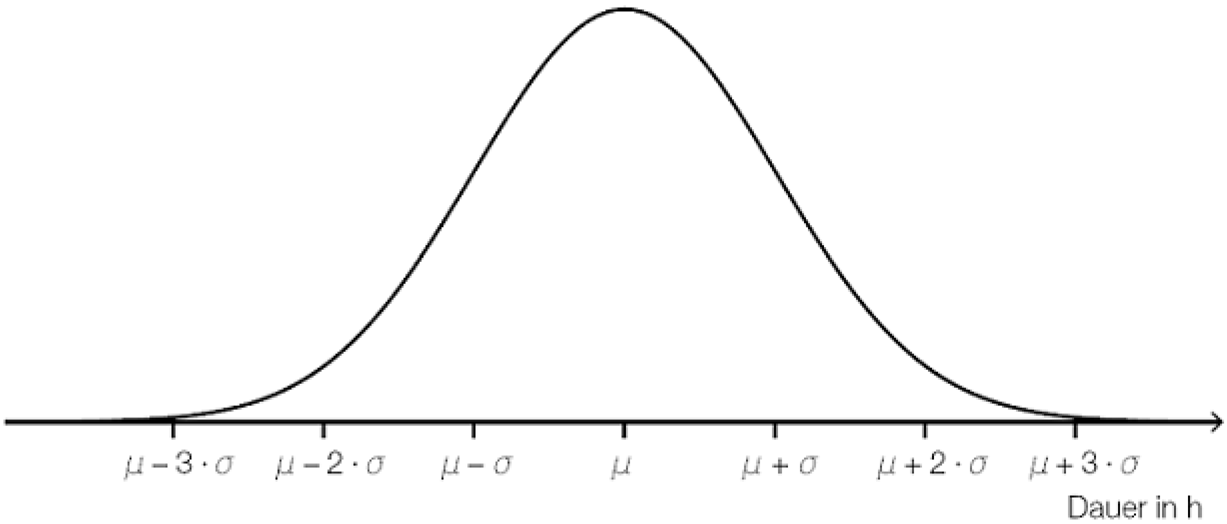
2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter b und A_0 der Funktion A. (A)

3) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Zeitintervall [4; 9]. Geben Sie die entsprechende Einheit an. (B)

Aufgabe 3:

Der Montageprozess eines Luftreinigungsgerätes besteht aus mehreren Fertigungsschritten. Die Dauer des Montageprozesses ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Montageprozess für ein zufällig ausgewähltes Luftreinigungsgerät eine Dauer d nicht überschreitet, beträgt 92 %.

1) Veranschaulichen Sie d und die beschriebene Wahrscheinlichkeit in der nachstehenden Abbildung des Graphen der zugehörigen Dichtefunktion. (A)



Quelle: Kompensationsprüfung 2, Jänner 2021, Seite 6

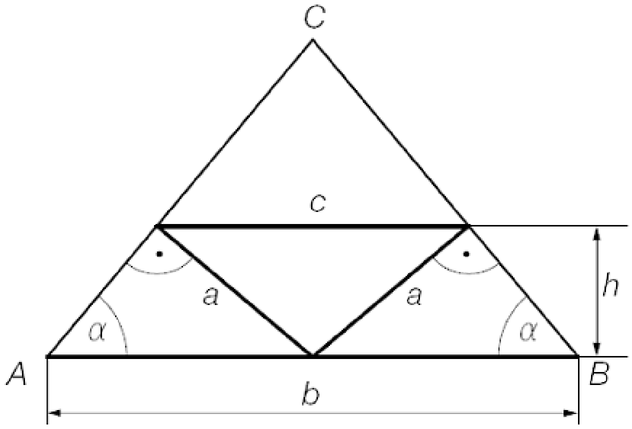
Für den Montageprozess gilt $\mu = 3$ h und $\sigma = 0{,}5$ h.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Dauer des Montageprozesses für ein zufällig ausgewähltes Luftreinigungsgerät mindestens 2,3 Stunden beträgt. (B)

3) Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Dichtefunktion einer Normalverteilung verändert, wenn bei gleichbleibendem Erwartungswert die Standardabweichung größer wird. (R)

Aufgabe 4:

Der Querschnitt eines Hausdaches ist ein gleichschenkeliges Dreieck *ABC*. Die nachstehende und nicht maßstabgetreue Abbildung zeigt den Querschnitt des Daches, das durch den Einbau zusätzlicher Balken mit den Längen a und c verstärkt werden muss.



Quelle: Kompensationsprüfung 1, Jänner 2021, Seite 8

1) Erstellen Sie mit Hilfe von b und α eine Formel zur Berechnung von a. (A)

Der Zimmerer wählt für die Größe des Winkels $\alpha = 50°$.

2) Begründen Sie, warum das Dreieck *ABC* nicht gleichseitig ist. (R)

3) Zeichnen Sie in die gegebene Abbildung die Strecke der folgenden Länge $\frac{b}{2} \cdot \tan(\alpha)$ ein. (R)

Lösungen der Aufgabenstellungen des Vorschlags 2:

Aufgabe 1:

1) $V(x) = 55 - \frac{x}{100} \cdot 4{,}3$

   Merke: Verbrauch für 1 km = $\mathbf{\frac{4{,}3}{100}}$

2) Nach einer Fahrt von 350 km sind noch 39,95 L Benzin im Tank.

3) $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = 30 \cdot t - t^2 + s_0$
   $s(15) - s_0 = 225$ m

   Merke: $\boldsymbol{s'(\mathrm{t}) = v(t);\ v'(t) = a(t)}$ **oder**
   $\boldsymbol{s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t;\ v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t}$

Aufgabe 2:

1) Es wird die Zeit berechnet, bis der Wirkstoff des Medikaments im Körper nur mehr 25 % der Wirkstoffmenge zur Zeit $t = 0$ beträgt.

   Merke: *A*(*t*) gibt stets die noch vorhandene Menge des Wirkstoffes zum Zeitpunkt *t* an.

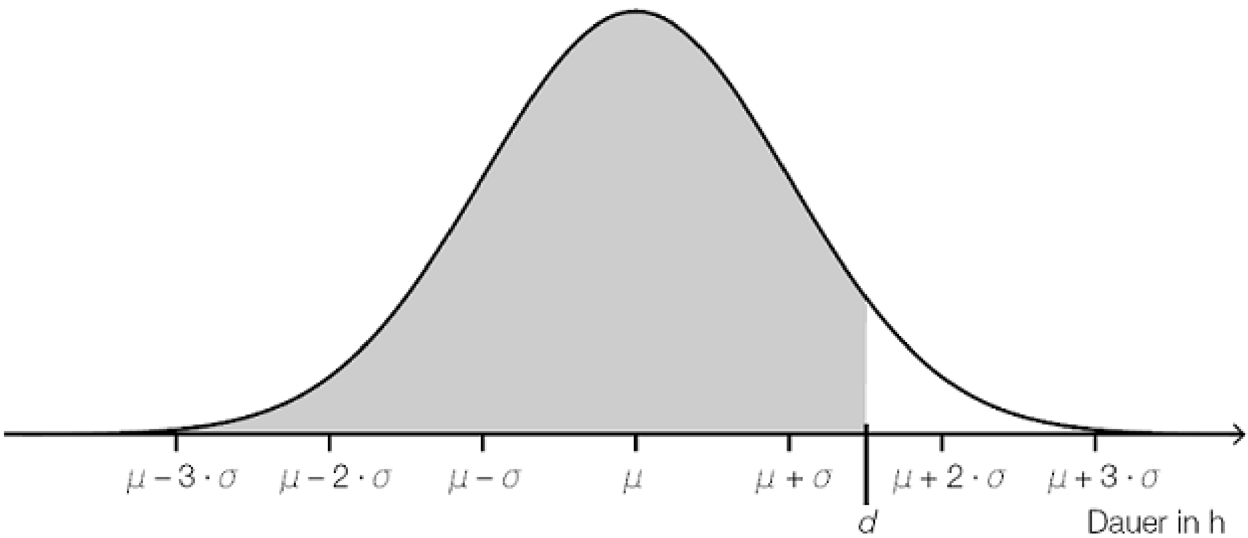
2) I: $0{,}20 = A_0 \cdot b^4$
   II: $0{,}045 = A_0 \cdot b^9$

3) $\frac{A(9) - A(4)}{9 - 4} = \frac{0{,}045 - 0{,}2}{5} = -0{,}031$ mg/h

   Merke: Die Einheit der mittleren Änderungsrate einer Funktion in einem Intervall setzt sich aus der Einheit des *y*-Wertes pro Einheit des *x*-Wertes zusammen.

Aufgabe 3:

1)



Quelle: Kompensationsprüfung 2, Jänner 2021, Seite 9