

Geometrische Formen und ihre Konstruktion	Tragendes Gerüst der elementargeometrischen Formenwelt ist der dreidimensionale Raum, der von Formgebilden unterschiedlicher Dimension bevölkert wird: 0-dimensionalen Punkten, 1-dimensionalen Linien, 2-dimensionalen Flächen, 3-dimensionalen Körpern. Geometrische Formen lassen sich auf vielfältige Weise konstruieren (herstellen) und definieren. Dadurch werden ihnen Eigenschaften aufgeprägt. Aus einfachen Grundformen (Gerade, Kreis, Dreieck, Quadrat, Würfel, Kugel, Zylinder, ...) können komplexere Konfigurationen gewonnen werden.
Operationen mit Formen	Geometrische Figuren und Körper lassen sich verlagern (insbesondere verschieben, drehen, spiegeln), verkleinern/vergrößern, auf eine Ebene projizieren, scheren, in einer bestimmten Richtung stauchen/dehnen, verzerren, in Teile zerlegen, mit anderen Figuren und Körpern zu komplexeren Gebilden zusammensetzen, zum Schnitt bringen, überlagern. Dabei ist es interessant herauszufinden, welche Beziehungen entstehen und welche Eigenschaften bei diesen Operationen erhalten bleiben oder sich in gesetzmäßiger Weise verändern.
Koordinaten	Zur Lagebeschreibung von Punkten mithilfe von Zahlen können auf Linien, Flächen und im Raum Koordinatensysteme eingeführt werden, die in der analytischen Geometrie zur rechnerischen Erfassung geometrischer Sachverhalte und in der Analysis zur graphischen Darstellung von Funktionen genutzt werden.
Maße	Messung der Länge, des Flächeninhalts, des Rauminhalts nach Vorgabe von Maßeinheiten (Einheitsstrecke, Einheitsquadrat, Einheitswürfel), Winkelmessung, Winkelberechnung, Umfangs-, Flächeninhalts- und Volumformeln, trigonometrische Formeln.
Muster	Es gibt unübersehbar viele Möglichkeiten, Punkte, Linien, Flächen, Körper und ihre Maße so in Beziehung zu setzen, dass geometrische Muster und Strukturen entstehen, deren tieferer Grund in geometrischen Theorien (euklidische Geometrie, kombinatorische Geometrie, Graphentheorie, projektive Geometrie, ...) systematisch herausgearbeitet wird. Diese Muster und Strukturen können bereits auf inhaltlich-anschaulichem Niveau sauber begründet werden.
Formen in der Umwelt	Reale Gegenstände, Operationen an und mit ihnen sowie Beziehungen zwischen ihnen können mithilfe geometrischer Begriffe beschrieben werden. Die Technik entwickelt Verfahren, mit deren Hilfe aus geeignetem Rohmaterial geometrische Formen hergestellt werden können, die bestimmten Zwecken genügen. In der bildenden Kunst werden geometrische Formen als Ausdrucksmittel eingesetzt.
Geometrisierung	Raumgeometrische Sachverhalte und Problemstellungen, aber auch Zahlbeziehungen und abstrakte Beziehungen, können in die Sprache der Geometrie übersetzt und geometrisch bearbeitet werden. Eine wichtige Rolle spielen dabei die Graphentheorie und die Darstellende Geometrie (Parallelprojektion, Zentralperspektive, ...), die mithilfe der Computergrafik heute bequem nutzbar ist.

Abb. 2: Grundideen der Geometrie


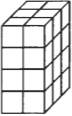
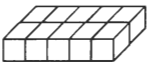
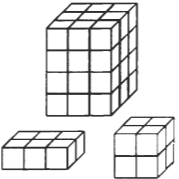
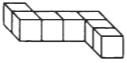
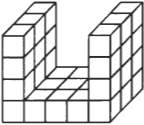
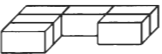
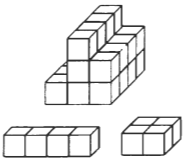

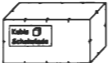
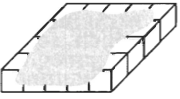
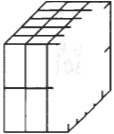
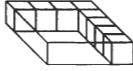
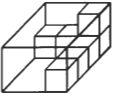
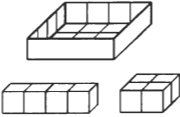
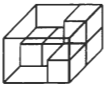
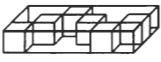
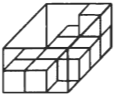
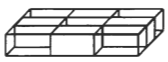
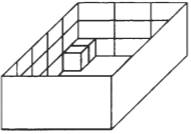

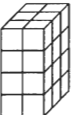
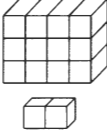
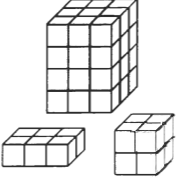
Variation des Aufgabenformats: „Aus wie vielen Bausteinen besteht die Anordnung?“	FE I	FE II	FE III	FE IV
	Einschichtige Würfelbauwerke in Würfel strukturieren	Mehrschichtige Würfelbauwerke in Würfel strukturieren	Einschichtige Würfelbauwerke in Würfelmehrlinge strukturieren	Mehrschichtige Würfelbauwerke in Würfelmehrlinge strukturieren
FB 1 Quader strukturieren				
FB 2 Nicht-konvexe Bauwerke strukturieren und zu einem Quader ergänzen				
FB 3 Unvollständig dargestellte Quader erfassen				
FB 4 Quader ausfüllen mit direkt rekonstruierbaren Kantenlängen				
FB 5 Quader ausfüllen mit rekonstruierbaren Kantenlängen				
FB 6 Quadervolumen verdoppeln und alternative Maße ermitteln				

Abb. 6: Konzeption und Differenzierung des Aufgabenformats „Raum strukturieren“ (vgl. auch die methodischen Hinweise und Arbeitsblätter auf der CD)

Es ist die Frage aufgeworfen worden, ob die Darbietungsweise von Würfelbauwerken, z. B. real oder grafisch als Schrägbild, signifikanten Einfluss auf die Vorstellungsfähigkeiten der Kinder ausübt. Denkbar ist, dass eine wirklichkeitsnahe Darstellung

zu besseren Resultaten bei der Lösung von Aufgabenstellungen zu Würfelbauwerken führt. Studien zeigen jedoch, dass Kinder ihre Strategien zur räumlichen Strukturierung eines vorgegebenen Würfelbauwerks unabhängig davon wählen, ob ihnen das Bauwerk

2.2 Makrostrategien

Nadine findet mithilfe einer Makrostrategie alle Lösungen. Ein Element wird auf einer Ebene (untere Steinebene in Abb. 5) festgehalten. Ein zweites Element wird so lange auf einer zweiten Ebene festgehalten bis die Elemente der restlichen zwei Ebenen getauscht worden sind (je 2 Türme). Dann wird auf der zweiten Ebene das Element getauscht. Sind alle drei Elemente auf dieser zweiten Ebene gewesen (je 6 Türme), wird das Element der ersten Ebene getauscht und das Verfahren wiederholt (insgesamt 24 Türme). Diese Strategie wird Tachometerzählprinzip genannt (vgl. Hoffmann 2003). Die Ebene, in der ein Element am längsten festgehalten wird, variiert von Kind zu Kind: Es kommt nicht ausschließlich die unterste oder oberste Ebene vor.

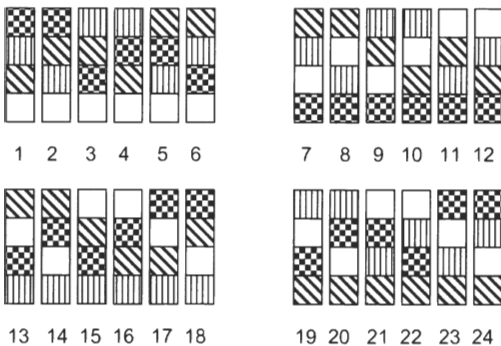


Abb. 5: Nadines Bearbeitung zur Turmaufgabe

Insgesamt konnten wir in allen Klassen ein zumindest in Teilen systematisches Vorgehen im Sinne der Mikrostrategien rekonstruieren. Ob den Kindern diese Strategien im Bearbeitungsprozess bewusst waren, lässt sich abschließend nicht klären, sie können auch zufällig entstanden sein. Ein wiederholtes Auftreten der entsprechenden Muster bei der Bearbeitung nachfolgender Aufgaben haben

wir aber als Indikator für ein nicht-zufälliges Anwenden gewertet. Die verwendeten Strategien entsprechen vielfach nicht den in Mathematiklehrbüchern für die Grundschule verwendeten Anordnungen. Darüber hinaus gibt es mehrere Schülerinnen und Schüler, welche die Makrostrategie des Tachometerzählprinzips entdeckten und aufgabenadäquat nutzen konnten.

Gerade zu Beginn des Lernprozesses hat die Handlungskompetenz der Kinder den Vorrang. Die Verbalisierungskompetenz entwickelt sich vielfach erst ganz allmählich und bedarf neben ausreichender Übungsangebote der geduldrigen und ermunternden Unterstützung durch die Lehrperson. Absolut zentral ist die kompetenzorientierte Würdigung der verschiedenen Lösungsansätze im Unterricht. Die Diskussion über die beschrittenen Lösungswege ermöglicht und fördert dann ein Hinwenden zu effektiveren Strategien. Diesen Prozess durchläuft ein jedes Kind allerdings gemäß seiner Lernvoraussetzungen bzw. individuellen Lernfortschritte.

3. Lernentwicklung der Kinder

Um die Lernentwicklung der Kinder zu analysieren, haben wir zu Beginn eine Liste von möglichen Indikatoren festgelegt (vgl. Abb. 6), an denen wir ggf. individuelle Lernfortschritte erkennen können. Die Analyse basiert in dieser Lernumgebung i.W. auf den in den Lernheften dokumentierten Eigenproduktionen der Schülerinnen und Schüler und wird ggf. ergänzt durch unterrichtliche Beobachtungen von am Projekt beteiligten Studierenden.

Timo (siehe Abb. 7) rechnet nach dem vorgegebenen ersten Päckchen (von unten beginnend mit $1 \cdot 8$ und $2 \cdot 9$) zwei weitere Folgen (Päckchen) von Aufgabenpaaren, die er unmittelbar nach rechts anschließt. Wie andere Kinder auch geht er über die Grenze der Maltafel hinaus und setzt die Struktur der Aufgabenfolge fort. Interessant ist Timos neue Fragestellung, wie sich denn die Aufgaben waagrecht auf jeder Zeile entwickeln. Er untersucht das an der obersten Zeile von $5 \cdot 4$,

$6 \cdot 5, 7 \cdot 6, 8 \cdot 7, 9 \cdot 8$ und $10 \cdot 9$ und schreibt dazu, dass beide Faktoren jeweils um 1 größer werden: „Von Rechnung zu Rechnung wächst die vordere Zahl und die hintere Zahl um eins.“ Und zu den Ergebnissen schreibt er: „Von Resultat zu Resultat wachsen die Abstände immer um zwei in einer geraden Reihe.“ Gemeint ist: Sie wachsen immer um die nächste gerade Zahl, was der Bildungsregel der „Fast-Quadratzahlen“ entspricht.

Timo

①

$1 \cdot 8 = 8$	$2 \cdot 9 = 18$
$2 \cdot 7 = 14$	$3 \cdot 8 = 24$
$3 \cdot 6 = 18$	$4 \cdot 7 = 28$
$4 \cdot 5 = 20$	$5 \cdot 6 = 30$
$5 \cdot 4 = 20$	$6 \cdot 5 = 30$

②

$7 \cdot 6 = 42$	$8 \cdot 7 = 56$
$6 \cdot 7 = 42$	$7 \cdot 8 = 56$
$5 \cdot 8 = 40$	$6 \cdot 9 = 54$
$4 \cdot 9 = 36$	$5 \cdot 10 = 50$
$3 \cdot 10 = 30$	$4 \cdot 11 = 44$

③

$9 \cdot 8 = 72$	$10 \cdot 9 = 90$
$8 \cdot 9 = 72$	$9 \cdot 10 = 90$
$7 \cdot 10 = 70$	$8 \cdot 11 = 88$
$6 \cdot 11 = 66$	$7 \cdot 12 = 84$
$5 \cdot 12 = 60$	$6 \cdot 13 = 78$

Paare von 1mal1-Aufgaben (nebeneinander)
 Beschreibe das Päckchen Rechne
 Vergleiche die Ergebnisse

Von Rechnung zu Rechnung wächst die vordere Zahl und die hintere Zahl um eins

Von Resultat zu Resultat wachsen die Abstände immer um zwei in einer geraden Reihe.

Abb. 7: Dokument von Timo zur Aufgabe B