

## 1. Vormerkungen zum Lernen an der Rechenwaage

Bei der Verwendung der Rechenwaage wird der **physikalische Gleichgewichts-** bzw. **Ungleichgewichtsbegriff** genutzt, um das **mathematische Gleichungs-** bzw. **Ungleichungsverständnis** zu veranschaulichen. Es bietet sich an, dass Kinder, aus ihrer Spielerfahrung an der Wippe schöpfend, sich mit der Rechenwaage vertraut machen. Zu diesen nutzbaren Erfahrungen gehören beispielsweise solche Erkenntnisse wie:

- Wenn zwei gleich schwere Kinder wippen, so sollten sie gleich weit von der Drehachse entfernt ihre Plätze einnehmen.
- Beim Wippen eines schweren und eines leichteren Kindes, die beide ganz außen sitzen, wird das Spielgerät durch das schwere Kind nach unten gedrückt.
- Möchten drei gleich schwere Kinder wippen, und ein Kind setzt sich auf eine Seite, während die zwei anderen auf der anderen Seite Platz nehmen, so steht die Wippe dann im Gleichgewicht, wenn das eine Kind ganz außen und die zwei anderen dicht beieinander halb so weit von der Drehachse sitzen.

In diesem Sinne ist die Rechenwaage geeignet, folgenden mathematische Inhalte den Kindern experimentell an konkreten Aufgaben zu veranschaulichen:

- die Relation „... ist größer als ...“, „... ist kleiner als ...“, „... ist gleich ...“,
- das Zerlegen von Zahlen in zwei oder mehr Summanden,
- die Darstellung von zweistelligen Zahlen als Summe von Zehnern und Einern,
- in den jeweils vorgegebenen Intervallen das Addieren und Multiplizieren mit steigenden Schwierigkeitsstufen,
- das Subtrahieren, Dividieren und Dividieren mit Rest,
- das Vergleichen von additiven und multiplikativen Zerlegungen von Zahlen.

## 2. Zahlen vergleichen, zerlegen, darstellen

Bei der Einführung der Rechenwaage sollte man an die Spielerfahrung von Kindern mit der Wippe anknüpfen. Man führt Übungen zum Vergleich von Zahlen im Bereich bis 10 mittels der Relationen  $a = b$ ,  $a < b$ ,  $a > b$  durch. Am Gleichgewicht bzw. Ungleichgewicht der Waage lassen sich die in Beispielen dargestellten Zahlenbeziehungen  $8 = 8$ ,  $5 < 9$  und  $4 > 1$  ablesen. (Siehe Abb. 1, 2 und 3)

- das Gewinnen von Tauschaufgaben zu gegebenen Additions- bzw. Multiplikationsaufgaben.

An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass die Rechenwaage auch sinnvoll bei der Vermittlung von Gesetzmäßigkeiten der Gleichungslehre in späteren Schuljahren eingesetzt werden kann. Der Äquivalenzbegriff für Gleichungen und bestimmte Regeln für äquivalentes Umformen von Gleichungen lassen sich für Schüler der Sekundarstufe einsichtig darstellen. Es ist möglich, die Rechenwaage mit ganz unterschiedlicher didaktischer Zielstellung und Funktion zu verwenden. Sie kann beispielsweise als Demonstrationsmittel im frontalen Unterricht zur Einführung bestimmter Sachverhalte der Grundschularithmetik gute Dienste leisten.

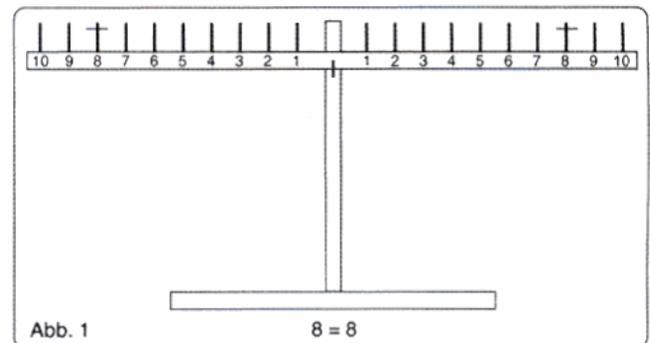
Weit effektiver aber ist ihre Verwendung in offenen Unterrichtsformen und im Förderunterricht. Durch konkretes Handeln (dem Anbringen der Anhängengewichte) finden die Kinder zu gestellten oder selbstgewählten Aufgaben experimentell Lösungen, bzw. sie erkennen mathematische Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten. Es ist aber auch angebracht, den Schülern Aufgabenserien zu stellen und die Richtigkeit ihrer Lösungen mit Hilfe der Rechenwaage überprüfen zu lassen. Vorliegende Erfahrungen besagen, dass auch Kinder, deren Lieblingsfach nicht gerade Mathematik ist, solche Selbstkontrollmöglichkeiten gern anwenden. Der Mathematikstoff im 1. und 2. Schuljahr der Grundschule sowie der von Förderschulen bietet dafür vielfältige Anwendungen.

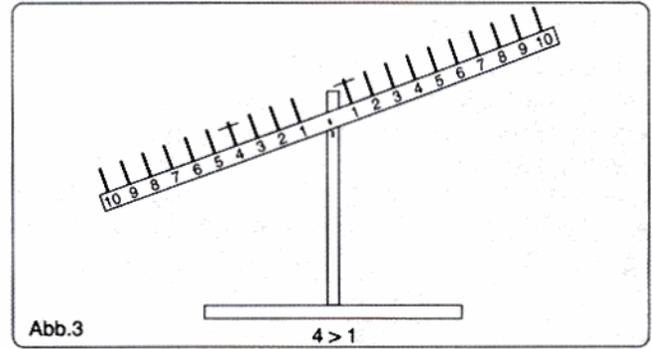
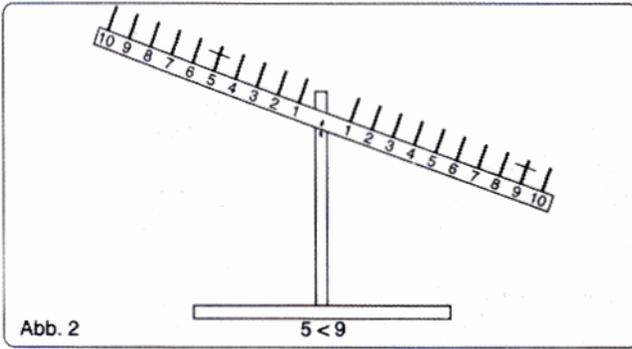
Auf den folgenden Seiten sollen **Anregungen** für das Lernen mit der Rechenwaage vermittelt werden. Diese sind in Form von exemplarischen Beispielen dargestellt. Durch Experimentieren auf der Grundlage dieser Beispiele werden Lehrer und Schüler stets weiterführende neue Aufgabenstellungen entdecken. Gerade darin liegt der Wert dieses Unterrichtsmittels, und im Umgang mit ihm wird ein Beitrag zur Vertiefung des Zahlenbegriffs geleistet.

Zu den folgenden Abbildungen und Kopiervorlagen beachten Sie bitte folgende Anmerkung:

Die Funktionsweise der Rechenwaage ist nur durch die Frontalansicht zu vermitteln. Um die jeweilige Anzahl der an den Zapfen angebrachten Anhängengewichte veranschaulichen zu können, sind diese als Querstriche über den Zahlen eingezeichnet. *Jeder Querstrich über einer Zahl bedeutet also ein Anhängengewicht.*

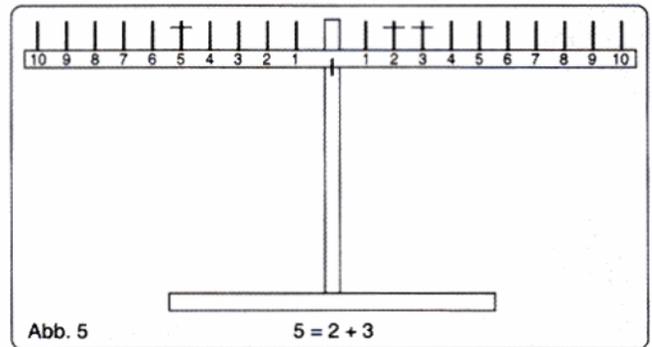
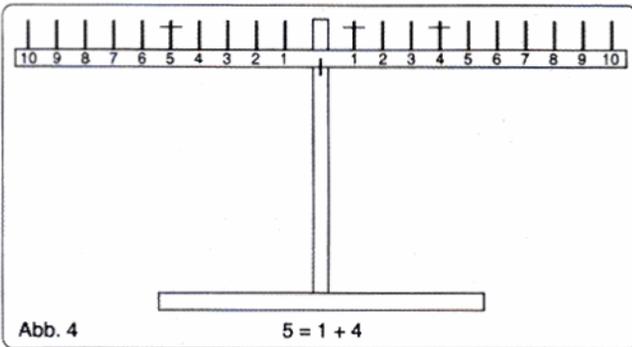
Die Funktionsweise der Rechenwaage ist nur durch die Frontalansicht zu vermitteln. Um die jeweilige Anzahl der an den Zapfen angebrachten Anhängengewichte veranschaulichen zu können, sind diese als Querstriche über den Zahlen eingezeichnet. *Jeder Querstrich über einer Zahl bedeutet also ein Anhängengewicht.*





Der Vertiefung des Zahlenbegriffs dienen vielfältige additive Zerlegungen von Zahlen, deren Richtigkeit durch das Gleichgewicht der Rechenwaage kontrolliert werden kann. Alle Zerlegungen in zwei Summanden der

Zahl 5 finden die Kinder leicht durch das Zusammenrücken von 2 Gewichten auf dem rechten Teil des Waagebalkens. (Siehe Abb. 4 und 5)

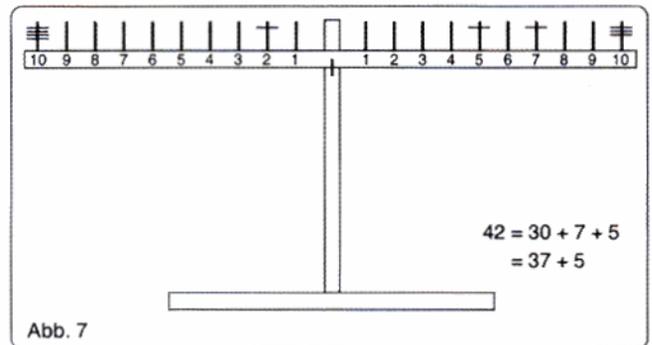
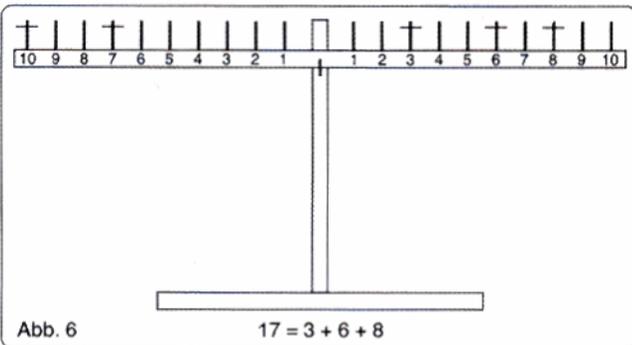


Die Zerlegung der Zahl 8 in  $4 + 4$  durch das Anhängen von 2 Gewichten an den Zapfen „4“ erfordert besondere Aufmerksamkeit, da hier bereits die Vorbereitung auf die Darstellung von  $2 \cdot 4 = 8$  erfolgt. Dieser Sachverhalt soll hier noch nicht thematisiert werden. Anschließend lassen sich vielfältige Zerlegungen in mehr als 2 Summanden durchführen. Solche Darstellungen wie  $8 = 2 + 2 + 2 + 2$  oder  $8 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$  sind im Hinblick auf später folgende Ungleichungen von besonderer Bedeutung.

Die Aufgabenstellung: „Suche möglichst viele Namen für die Zahl 8!“ ergibt als Lösungen:

- |             |                 |                     |
|-------------|-----------------|---------------------|
| $8 = 1 + 7$ | $8 = 1 + 2 + 5$ | $8 = 1 + 2 + 3 + 2$ |
| $8 = 2 + 6$ | $8 = 1 + 3 + 4$ |                     |
| $8 = 3 + 5$ | $8 = 1 + 4 + 3$ |                     |
| $8 = 4 + 4$ | $8 = 1 + 5 + 2$ |                     |
| $8 = 5 + 3$ | $8 = 1 + 6 + 1$ |                     |
| $8 = 6 + 2$ |                 |                     |
| $8 = 7 + 1$ |                 | usw.                |

Hierbei ist die Rechenwaage ein praktisches Kontrollgerät.



Die Darstellung der Zahlen von 11 bis 19 erfolgt als Summe von 10 und einer einstelligen Zahl. Nach dieser Vermittlung folgen Übungen im Zerlegen von zweistelligen Zahlen im Bereich bis 19 in zwei oder mehrere Summanden in Analogie zu den Beispielen im Intervall von 1 bis 10. (Siehe Abb. 6)

Mit Einführung der zweistelligen Zahlen als Summe aus Zehnern und Einern können weiterführende Übungen im Zerlegen von Zahlen durchgeführt werden. Indem die Kinder vielfältige Darstellungen einer zweistelligen Zahl durch 2 oder mehrere Summanden finden, vertieft sich das Zahlenverständnis im Zahlenbereich bis 100. (Siehe Abb. 7)

### 3. Additionsaufgaben

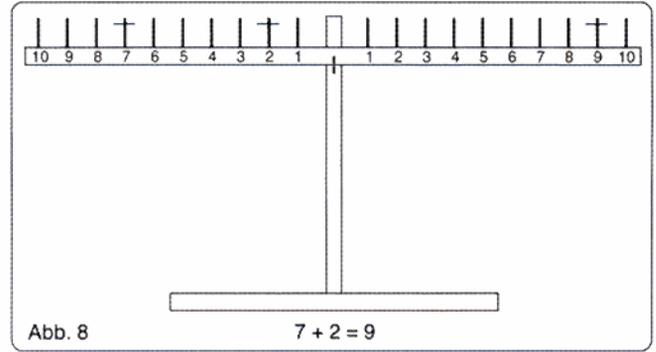
Aus dem Darstellen, Zerlegen und Vergleichen von Zahlen an der Rechenwaage haben die Kinder Erfahrungen über additive Zahlenverknüpfungen gesammelt. Sie wissen, dass durch das Anhängen der Gewichte auf derselben Seite des Waagebalkens Additionsaufgaben entstehen. Die Summe ist dann auf der anderen Seite des Balkens darzustellen. Die

Richtigkeit der Summe ist gegeben, wenn Gleichgewicht besteht. Unter Beachtung der Ausführungen im Punkt 2 lassen sich hier in den nacheinander im Arithmetikunterricht zu behandelnden Zahlenintervallen spezielle Aufgaben finden. (Siehe Abb. 8, 9 und 10)

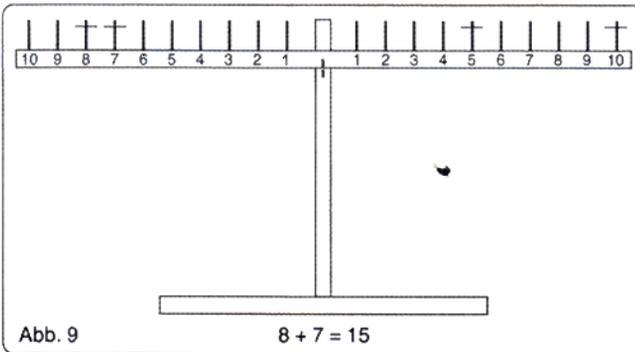
Diese Beispiele lassen sich in selbstständiger Schülerarbeit erweitern. In der Abbildung zur Aufgabe  $48 + 5$  ist die Summe 53 als  $50 + 3$  dargestellt. Es wird sicher Kinder geben, die 53 auch als  $50 + 2 + 1$ , als  $50 + 1 + 1 + 1$  oder auch als  $49 + 4$  usw. darstellen.

Auch hier sammeln die Schülerinnen und Schüler wichtige Erfahrungen im Umgang mit Zahlen durch Handlungen am Modell der Rechenwaage.

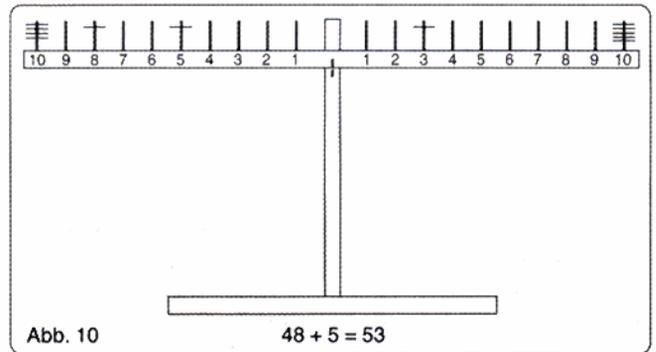
#### Zahlenbereich bis 10:



#### Zahlenbereich bis 20:



#### Zahlenbereich bis 100:

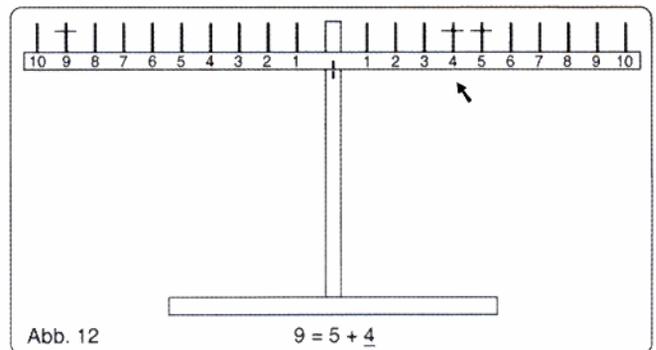
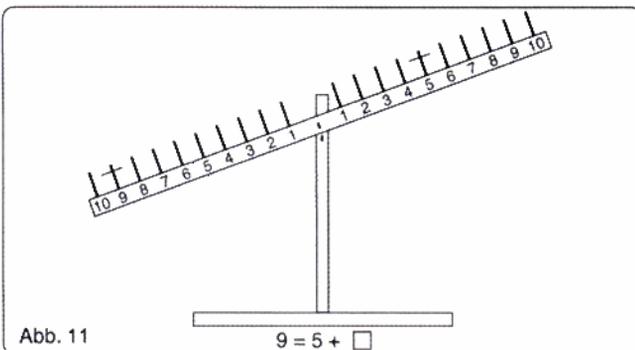


### 4. Subtrahieren durch Ergänzen

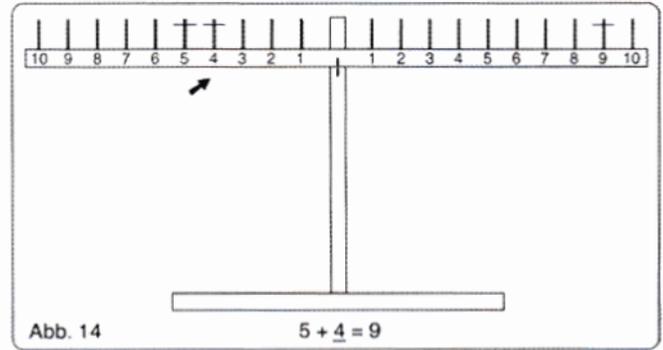
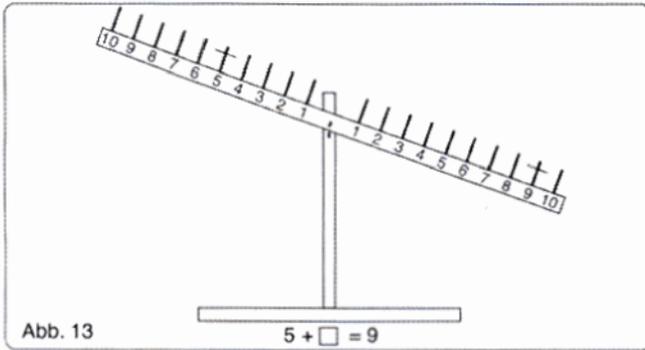
Das Subtrahieren kann veranschaulicht werden, indem man die Subtraktion als Umkehroperation der Addition nutzt. Aufgaben des Typs  $a - b = x$  werden veranschaulicht in der Form  $a = b + x$  oder  $b + x = a$ . Am Beispiel der Aufgabe  $9 - 5 = \square$  ergeben sich folgende Darstellungen: (siehe Abb. 11 – 14).

Die zweite Darstellungsform ist eine wichtige Vorübung für das schriftliche Verfahren der Subtraktion, das

additiv ausgeführt werden soll. Solche Übungen sollten dann ebenfalls im jeweils erweiterten Zahlenbereich bis 20 bzw. später bis 100 durchgeführt werden. Zu den notwendigen Einsichten hinsichtlich der Darstellung der größeren Zahlen kommen Schulkinder bei solchen Übungen, wie sie unter Punkt 2 ausgeführt worden sind.



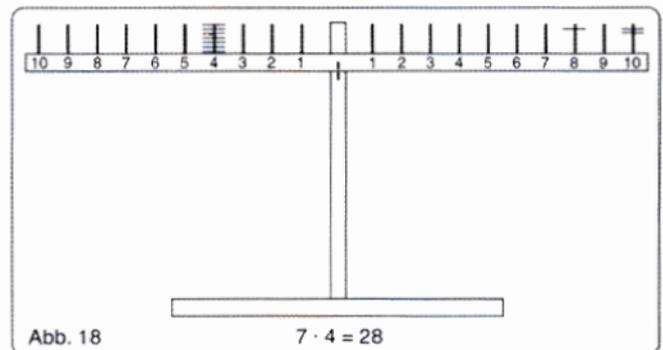
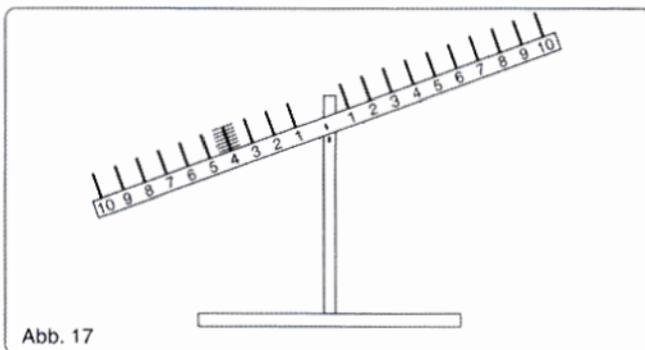
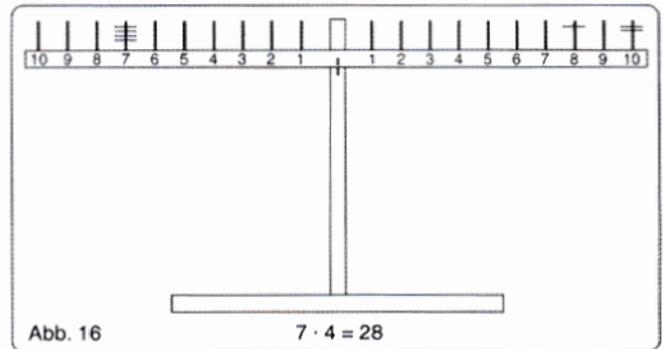
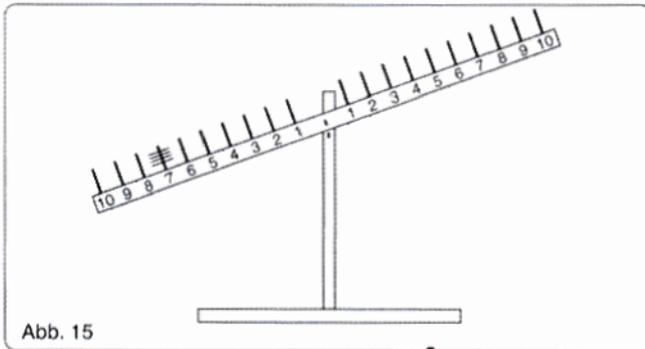
Die zweite Darstellungsform finden Sie auf Seite 5.



## 5. Grundaufgaben der Multiplikation

Im Beispiel der Zerlegung  $8 = 4 + 4$  haben die Kinder erkannt, dass  $4 + 4$  auch als  $2 \cdot 4$  aufgefasst werden kann und die Darstellung auf der Rechenwaage so erfolgt, dass 2 Gewichte auf den Zapfen „4“ gehängt werden. Die Darstellung der Zehner haben sie so kennen gelernt, dass z. B. bei der Zahl 70 an den Zapfen „10“ genau 7 Wägestücke gehängt worden sind. D. h. 70 ist als  $7 \cdot 10$  veranschaulicht worden. Daraus folgt, dass

hier Multiplikation als Addition gleicher Summanden aufgefasst wird. An der Rechenwaage wird die Aufgabe so dargestellt, dass im Beispiel  $7 \cdot 4$  jeweils im linken Teil des Wägebalkens an den Zapfen „4“ insgesamt 7 Gewichte oder an den Zapfen „7“ die 4 Gewichte gehängt werden. Auf der rechten Seite wird die Zahl 28 dargestellt.



Der Term  $4 \cdot 7$  sollte jeweils in **beiden** Möglichkeiten dargestellt werden, da diese gleichwertig sind und das Verständnis für die Kommutativität der Multiplikation von Anfang an geweckt wird.

Alle Grundaufgaben der Multiplikation (d.h. das gesamte kleine Einmaleins) können an der Rechenwaage dargestellt bzw. überprüft werden. (Siehe Abb. 15 – 18)

## 6. Division und Division mit Rest

Im Arithmetikunterricht haben die Kinder zunächst die Division in der Form  $a : b = x$  auf zwei Arten kennen gelernt:

1.  $a : b = x$  bedeutet, dass  $a$  Elemente auf  $b$  Mengen verteilt werden und der Quotient  $x$  die Anzahl der Elemente pro Menge angibt – **Verteilen**. ( $18 : 6 = 3$  bedeutet z. B., dass 18 Gegenstände an 6 Personen verteilt werden. Der Quotient 3 gibt die Anzahl der Gegenstände pro Person an.)

2.  $a : b = x$  kann aber auch bedeuten, dass  $a$  Elemente so aufgeteilt werden sollen, dass Mengen mit  $b$  Elementen entstehen und der Quotient  $x$  die Anzahl der gleichmächtigen Mengen angibt – **Aufteilen**. ( $18 : 6 = 3$  bedeutet z. B., dass 18 Gegenstände in Mengen zu 6 Stück aufgeteilt werden, der Quotient 3 gibt die Anzahl der Personen an, die je 6 Gegenstände erhalten haben.)