E1 Das solltest du schon können:

- arithmetische und geometrische Folgen durch explizite und rekursive Bildungsgesetze beschreiben und grafisch darstellen

E2 Was lernst du in diesem Kapitel?

Bei Folgen werden Fragen gestellt wie: ‚Wie lautet das fünfte Glied dieser Folge?'

Die Reihe dagegen liefert die Antwort z.B. auf die Frage: ‚Wie lautet die Summe der ersten fünf Glieder der Folge?'

Hier geht es also um Summen von Folgengliedern.

Vom neunjährigen **Carl Friedrich Gauß** ist die Anekdote überliefert, dass er seinen Dorfschullehrer, der seine Schüler für geraume Zeit beschäftigen wollte, indem er sie die Summe der Zahlen von eins bis hundert ausrechnen ließ, überraschte. Nach wenigen Augenblicken hatte Carl Friedrich die richtige Lösung parat. Ihm war aufgefallen, dass man die Zahlen sinnvoll paaren kann: die erste mit der letzten, die zweite mit der vorletzten — immer ergibt sich dieselbe Summe, nämlich $100 + 1$. Da es 50 solcher Paare gibt, musste die Summe $101 \cdot 50 = 5\,050$ sein. Diese Summationsmethode nennt man daher heute noch ‚Gaußsche Summenformel'.

E3 Am Ende des Kapitels kannst du …

- FA-L 8.1 den Begriff der Summe einer unendlichen Reihe definieren.
- FA-L 8.2 endliche arithmetische und geometrische Reihen und ihrer Summen berechnen.
- FA-L 8.3 Summen unendlicher (konvergenter) geometrischer Reihen berechnen.

Hinweis: Diese Kompetenzen sind nicht Teil der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung.

digi.schule/am6k5

Der Hund des Jägers

Morgens um 6 Uhr bricht ein Jäger mit seinem Hund zu seiner 10 km entfernten Jagdhütte auf. Sein Hund, der doppelt so schnell wie der Jäger ist, sprintet zur Hütte, kehrt wieder um und läuft zum Jäger zurück und pendelt so ständig zwischen Jäger und Hütte hin und her, bis der Jäger dort angekommen ist. Welche Strecke ist der Hund gelaufen, wenn der Jäger um 8 Uhr an der Hütte ankommt?

Lösungsweg(e):
Dieses Problem lässt sich auf mehrere unterschiedliche Arten lösen. Ein Neurowissenschaftler stellte fest, dass gute Physiker im Schnitt 14 Sekunden brauchten, gute Mathematiker dagegen 35 Sekunden. Wie war das erklärbar?

Mathematiker bildeten fast allesamt eine sogenannte geometrische Reihe: Sie berechneten die (unendliche) Summe aller Wegstrecken, die der Hund gelaufen ist (nach einigem Nachrechnen wäre das die Summe $10 + \frac{20}{3} + \frac{20}{9} + \frac{20}{81} \ldots$), und sie erhielten als Ergebnis von 20 km.

Die Physiker erhielten das gleiche Ergebnis, nur wesentlich einfacher: Nachdem der Hund doppelt so schnell läuft wie der Jäger, welcher 10 km zurücklegt, muss der Hund zur gleichen Zeit die doppelte Strecke zurückgelegt haben, also 20 km.

Einen Mathematiker gab es aber, der diese Aufgabe in sagenhaften 8 Sekunden löste: Es war John von Neumann, einer der genialsten Mathematiker der Neuzeit, der auch gerne als ‚Vater der Computertechnik' bezeichnet wird. Als der Psychologe seine Begeisterung ausdrückte, dass er als Mathematiker es so schnell schaffte, obwohl er doch eigentlich die Reihe aufsummieren müsste, meinte von Neumann trocken: ‚Habe ich ja!'

(Nach Gerthsen, Physik, Springer Verlag, 18. Auflage)

John von Neumann, 1903- 1957 war einer der genialsten Mathematiker der Neuzeit.
Er beschäftigte sich unter anderem intensiv mit Quantenmechanik, Spieltheorie und gilt als Vater des modernen Computers.

5.1 Arithmetische Reihen

Demo 5.1.01

Die arithmetische Reihe

Berechne die Summe der ersten **a**) drei, **b**) vier, **c**) sieben, **d**) n Glieder der arithmetischen Folge mit $a_1 = 13$ und $d = 4$.

Lösungsweg:

a) Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge nennt man auch **(endliche) arithmetische Reihe**.
Hier haben wir eine arithmetische Reihe über die ersten drei Glieder ($n = 3$):
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 13 + 17 + 21 = 51\ (= 3 \cdot 17)$
Wie du siehst, ist das Ergebnis identisch mit dem Dreifachen des mittleren Wertes 17. Zufall oder nicht?

b) $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 13 + 17 + 21 + 25 = 76\ (= 4 \cdot 19)$
Der Mittelwert liegt hier genau zwischen 17 und 21, also bei 19.
Wie du siehst, reicht es auch hier, den Mittelwert zu berechnen und diesen einfach mit der Anzahl der Glieder zu multiplizieren. Dieser Mittelwert kannst du immer aus dem ersten und letzten Glied berechnen: $\bar{x} = \frac{a_1 + a_4}{2} = \frac{13 + 25}{2} = 19$

c) $s_7 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_7 = 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 = 175\ (= 7 \cdot 25)$
Auch hier wirst du wieder schlauer rechnen:
Das Ergebnis ist gleich 7-mal dem Mittelwert: $s_n = 7 \cdot \frac{a_1 + a_7}{2} = 7 \cdot \frac{13 + 37}{2} = 7 \cdot 25 = 175$

d) Und damit ergibt sich die allgemeine Formel für die Berechnung einer endlichen arithmetischen Reihe:
$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Definition

Arithmetische Reihe

Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge nennt man **arithmetische Reihe** s_n:
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$

Demo 5.1.02

Dachziegel

Eine trapezförmige Dachseite hat in der untersten Reihe 46 Dachziegel. Jede Reihe darüber hat jeweils 2 Dachziegel weniger. Insgesamt gibt es 13 Reihen.
Wie viele Dachziegel befinden sich auf der gesamten Dachfläche?

Lösungsweg:
Die Anzahl der Dachziegel pro Reihe bildet eine arithmetische Folge mit $n = 13$, $a_1 = 46$ und $d = -2$.

Um die Formel $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ zu benützen, benötigen wir zuerst a_n:
$a_n = a_1 + (n-1)d = 46 + (13-1) \cdot (-2) = 22$
Somit ist $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{13}{2}(46 + 22) = 442$.
Die Dachseite enthält also 442 Ziegel.

Geogebra
Summe einer Reihe berechnen:
z.B. s_{100} von $a_n = 4n - 5$
• Summe(4n-5, n, 1, 100)
⇒ 19700

digi.schule/am6k51

Herleitung 5.1.03

Arithmetische Reihe in Abhängigkeit von a_1 und d

Im vorigen Beispiel mussten wir, um die Reihe zu berechnen, zuerst das letzte Glied a_n berechnen. Es gibt aber auch eine Formel, bei der du nur a_1 und d benötigst. Diese bekommst du, indem du die Formel $a_n = a_1 + (n-1)d$ in die arithmetische Reihe $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ einsetzt:

$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ | setze für a_n den Ausdruck $a_1 + (n-1)d$ ein

$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$

$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

Merke

Berechnung von arithmetischen Reihen

Jede endliche arithmetische Reihe der ersten n Glieder lässt sich berechnen nach den beiden Formeln:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$s_n = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}$$

Demo 5.1.04

Arithmetische Reihe berechnen aus unterschiedlichen Darstellungen einer arithmetischen Folge

Gegeben sind unterschiedliche Darstellungsformen einer arithmetischen Reihe.
Berechne jeweils s_{10}.

a) $a_1 = 14; d = 2$ **b)** $a_n = -n + 1$ **c)** $a_1 = 0; a_{n+1} = a_n - 3$ **d)** $a_2 = 10; a_4 = 30$

Lösungsweg:

a) Einfach die Werte für a_1 und d in die Summenformel $s_n = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}$ einsetzen:

$s_{10} = 10 \cdot \frac{2 \cdot 14 + (10-1) \cdot 2}{2} = 230$

b) Hier kannst du a_1 und a_{10} direkt berechnen:

$a_1 = -1 + 1 = 0$

$a_{10} = -10 + 1 = -9$

Einsetzen in die Summenformel $s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$:

$s_{10} = 10 \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2} = 10 \cdot \frac{0-9}{2} = -45$

c) Hier kannst du aus der Gleichung $a_{n+1} = a_n - 3$ direkt ablesen, dass $d = -3$ ist.
Dadurch kommst du s_{10} wie bei Unterbeispiel a):

$s_{10} = 10 \cdot \frac{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 2}{2} = 90$

d) Berechne zuerst d:

$a_4 = a_2 + 2d \Rightarrow 30 = 10 + 2d \Rightarrow d = 10$

Jetzt a_1 berechnen:

$a_2 = a_1 + d \Rightarrow 10 = a_1 + 10 \Rightarrow a_1 = 0$

Einsetzen in die Summenformel wie bei a):

$s_{10} = 10 \cdot \frac{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 10}{2} = 450$

5.1.05
H2
digi.schule/am6k51a05

Arithmetische Reihe berechnen aus expliziter Darstellung

Gegeben ist eine arithmetische Reihe in ihrer expliziten Darstellung.

Berechne 1) s_{13}, 2) s_{30}, 3) s_{100}.

a) $a_n = 3n - 21$

b) $a_n = n + 34$

c) $a_n = 4 - 2{,}5n$

d) $a_n = -\frac{n}{10}$

e) $a_n = -4$

5.1.06
H1, H2
digi.schule/am6k51a06

Teilbarkeit

Berechne folgende endliche arithmetische Reihen:

a) die Summe der ersten dreißig natürlichen Zahlen ab $n = 1$, die durch 5 teilbar sind

b) die Summe aller geraden Zahlen im Intervall $[20; 38]$

c) die Summe aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen im Intervall $[300; 330]$

Achte jeweils auf die richtige Anzahl der Folgenglieder.

5.1.07
H2
digi.schule/am6k51a07

Arithmetische Reihe aus a_1 und d berechnen

Berechne aus dem ersten Glied der Folge und dem Parameter d die arithmetische Reihe der ersten 55 Glieder.

a) $a_1 = 600; d = -12$

b) $a_1 = 9; d = 13$

c) $a_1 = 51; d = 0$

d) $a_6 = -\frac{1}{4}; d = -\frac{3}{4}$

5.1.08
H2
digi.schule/am6k51a08

Arithmetische Reihe aus zwei Folgengliedern berechnen

Gegeben sind zwei Folgenglieder einer arithmetischen Reihe.

Berechne die Summe der ersten 1) 23, 2) 80 Folgenglieder.

a) $a_3 = 16;\ a_4 = 19$

b) $a_8 = 0;\ a_{12} = 48$

c) $a_{21} = -\frac{1}{8};\ a_{30} = 1$

d) $a_{17} = a_4; 9 = -\frac{4}{5}$

5.1.09
H2
digi.schule/am6k51a09

Beweis

Zeige an Hand der Summenformel, dass allgemein gilt:

Die Summe aller

a) geraden,

b) ungeraden Zahlen

im Intervall $[-k; +k]$ ($k \in \mathbb{N}_g$ bzw. $k \in \mathbb{N}_u$) ergibt stets 0.

Besondere arithmetische Reihe

5.1.10
H1, H2, H4
digi.schule/am6k51a10

Unter bestimmten Umständen kann eine arithmetische Reihe mit der Formel $s_n = a_1 \cdot n$ berechnet werden. Unter welchen Voraussetzungen gilt diese Formel?

Begründe dein Ergebnis.

Hinweis: Versuche auf die Lösung zu kommen, indem du selbst gewählte Zahlen in die Formel einsetzt.

Erbschaft

5.1.11
H1, H2
digi.schule/am6k51a11

Eine Erbschaft wird unter 10 Kindern verteilt. Das ältere Kind bekommt jeweils um 240 € mehr als das nächst jüngere Kind. Für das jüngste Kind bleiben 3.800 €.

Wie viel erhält das älteste Kind und wie hoch war die Erbschaft insgesamt?

Fußballstadion

5.1.12
H1, H2
digi.schule/am6k51a12

In einem Fußballstadion hat die unterste Reihe 500 Plätze, und jede weitere Reihe darüber hat um 20 Plätze mehr. Im Stadion gibt es insgesamt 46 Reihen.

Wie viele Plätze hat das Stadion?

Bundesliga

5.1.13
H1, H2
digi.schule/am6k51a13

Wie viele Spiele müssen in einer Liga, in der zwölf Mannschaften spielen, stattfinden, wenn jede Mannschaft gegen jede andere genau zweimal antreten muss?

Geschoss

5.1.14
H1, H2
digi.schule/am6k51a14

Wird ein Gegenstand senkrecht nach oben geschleudert, dann legt er pro Sekunde etwa zehn Meter weniger zurück als in der Sekunde zuvor, wenn die Luftreibung bei der Berechnung nicht berücksichtigt wird.

a) Berechne die Höhe, die ein Geschoss, welches mit einer Geschwindigkeit von 110 m/s abgefeuert wurde, erreicht.

b) Nach welcher Zeit hat es seinen höchsten Punkt erreicht?

110 m/s bedeutet, dass das Geschoss in der ersten Sekunde 110 m zurück gelegt hat.